

ΠΑΝΕΛΛΑΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πέμπτη 18 Ιουνίου 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

A1 Θεωρία σελίδα 16.

A2 α') Λ

β') Σ

γ') Λ

A3 α') $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\beta') (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{με } x > 0$$

$$\gamma') (\sin x)' = -\eta \mu x$$

A4 Θεωρία σελίδα 28 – 29.

ΘΕΜΑ Β

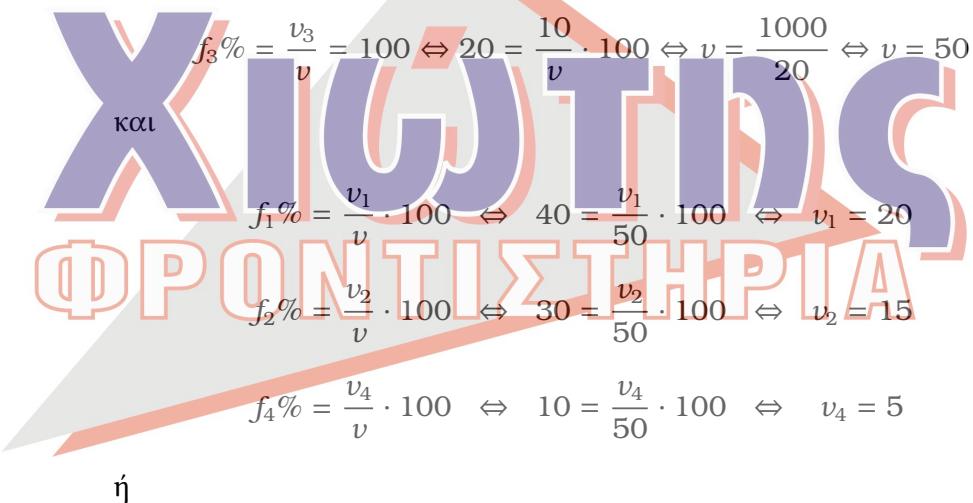
B1 Αφού το 40% των μαθητών δε διάβασαν κανένα βιβλίο έχουμε $f_1\% = 40\%$. Άρα:

$$\begin{aligned}
 f_1\% &= F_1\% = 40\% \\
 f_2\% &= F_2\% - F_1\% = 70\% - 40\% = 30\% \\
 f_3\% &= F_3\% - F_2\% = 90\% - 70\% = 20\%
 \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Είναι

$$f_3\% = 100\% - f_1\% - f_2\% - f_3\% - f_4\% = 100\% - 10\% - 30\% - 10\% = 20\%$$

Από την άλλη είναι



$$v_4 = 50 - v_1 - v_2 - v_3 = 50 - 20 - 15 - 10 = 5$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= v_1 = 20 \\
 N_2 &= N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35 \\
 N_3 &= N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45 \\
 N_4 &= N_3 + v_4 = 45 + 5 = 50
 \end{aligned}$$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

| x_i | v_i | $f_i\%$ | N_i | $F_i\%$ |
|--------|-------|---------|-------|---------|
| 0 | 20 | 40 | 20 | 40 |
| 1 | 15 | 30 | 35 | 70 |
| 2 | 10 | 20 | 45 | 90 |
| 3 | 5 | 10 | 50 | 100 |
| Σύνολο | 50 | 100 | | |

B2 Το ποσοστό των μαθητών που είχε διαβάσει αντιστοιχεί στη σχετική συχνότητα $f_4\% = 10\%$.

B3 Τουλάχιστον ένα βιβλίο διάβασαν οι $v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30$ μαθητές.

B4 Το πολύ 2 βιβλία διάβασε το

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% = 40\% + 30\% + 20\% = 90\%$$

των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Είναι $f(-1) = -2$ οπότε:

$$\begin{aligned} f(-1) = -2 &\Leftrightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \lambda + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \end{aligned}$$

Γ2 Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Γ3 Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | |
|------|-------------|---|---|-----------|---|
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| f | $f(0) = 2$ | | | | |
| | $f(2) = -2$ | | | | |

Από το πίνακα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ ίσο με $f(0) = 2$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ ίσο με $f(2) = -2$.

Γ4 Για $\lambda = 3$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)^2}{6(x - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Για την $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{2020}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19}(x^2 + 4x + 5)' \\
 &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19}(2x + 4) \\
 &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2 \cdot (x + 2) \\
 &= 40(x^2 + 4x + 5)^{19}(x + 2)
 \end{aligned}$$

Δ2 Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2) = 0$$

Δ3 Η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στον άξονα x' και $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$ από το ερώτημα Δ2. Επιπλέον είναι

$$f(-2) = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Άρα ζητείται η εφαπτομένη η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x' και διέρχεται από το σημείο $B(-2, 1)$. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη. Εφόσον είναι παράλληλη στον άξονα x' είναι $\alpha = 0$ και εφόσον διέρχεται από το B είναι

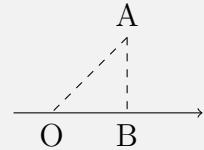
$$1 = 0 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y = 1$.

Δ4 Έστω το σημείο $A(x, 1)$, $x > 0$ επί της ευθείας $y = 1$. Είναι:

$$\begin{aligned}
 AO &= \sqrt{(x - 0)^2 + (1 - 0)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο AOB όπως αυτό απεικονίζεται στο σχήμα έχουμε:



τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\text{AO}^2 = \text{AB}^2 + \text{OB}^2 \Leftrightarrow \text{AO} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Οπότε $g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

